ÜBUNGSBLATT 8

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte	/ 8	/ 5	/ 5	/ 18

1. (a) Bestimmen Sie alle zyklischen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$.

   (b) Bestimmen Sie alle zyklischen Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{15}^*, \odot)$.

   (c) Gegeben sei die Gruppe $(\mathrm{S}_4, \cdot)$ und $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_4$.

      i. Bestimmen Sie die Ordnung $\mathrm{o}(\pi)$ von π.

      ii. Wie viele Rechtsnebenklassen hat die Untergruppe $\langle \pi \rangle$ in S_4?

   (2.5 + 3.5 + 1 + 1 Punkte)

2. (a) Seien $g = x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 3$ und $h = 2x^3 + 4x^2 + x \in \mathbb{Z}_7[x]$.
   Berechnen Sie $g \bmod h$, $\mathrm{ggT}(g, h)$, $\mathrm{kgV}(g, h)$ und $s, t \in \mathbb{Z}_7[x]$ mit

$$s \cdot g + t \cdot h = \mathrm{ggT}(g, h) \ .$$

   (b) Seien $g = x^5 + x^3 + x + 1$ und $h = x^8 + x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.
   Berechnen Sie ein $f \in \mathbb{Z}_2[x]$ mit $\mathrm{grad}(f) < 8$, so dass $(f \cdot g) \bmod h = 1$.

   (3 + 2 Punkte)

3. (a) Faktorisieren Sie $f = x^4 - 3 \in K[x]$ (d.h. schreiben Sie f als Produkt von irreduziblen Polynomen in $K[x]$), wenn

      i. $K = \mathbb{R}$, ii. $K = \mathbb{Q}$, iii. $K = \mathbb{Z}_{13}$.

   (b) Beweisen Sie, dass 5 die einzige Primzahl der Form $z^4 + 4$ mit $z \in \mathbb{Z}$ ist.
   Hinweis: Zeigen Sie: $z^2 + 2z + 2$ teilt $z^4 + 4$.

   (3 + 2 Punkte)

Bitte begründen Sie Ihre Antworten.
Lösungen ohne Lösungsweg werden nicht gewertet.