Grundlagen der Wirtschaftsmathematik für das Sport- und Eventmanagement

Privatuniversität Schloss Seeburg

Lineare Programmierung
Aufstellen eines LPs

- Variablenerklärung (VE)
- Zielfunktion (ZF)
- Nebenbedingungen (NB)
- Nichtnegativitätsbedingung (NNB)

Einführendes Beispiel (Rucksackproblem):

Ein Rucksack mit einem Fassungsvermögen von 20 kg soll mit Gegenständen von unterschiedlichem Gewicht und Wert so beladen werden, dass der Wert der mitgenommenen Gegenstände maximal wird. Jeder Gegenstand ist dreimal verfügbar.

Gegenstand	Gewicht (in kg)	Wert (in Euro)
1	5	4
2	8	11
3	4	5

Lineare Programmierung
Aufstellen und Lösen eines LPs

Eine Firma, die Mountainbikes herstellt, möchte zwei neue Modelle auf den Markt bringen. Zur Herstellung und Lagerung dieser Fahrräder werden Maschinenstunden (assembly time), Arbeitsstunden (inspection time) und Lagerraum (storage space) benötigt. Wie viele Stück der beiden Mountainbike-Modelle sollen unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Ressourcen produziert werden um den Gewinn zu maximieren? Das Management der Firma geht davon aus, dass alle produzierten Stück abgesetzt werden können.

	Modell 1	Modell 2	max. Ressourcen
Maschinenstunden pro Stück	4	10	100
Arbeitsstunden pro Stück	2	1	22
Lagerraum pro Stück (in kubischen Fuß)	3	3	39
Gewinn pro Stück (in US$)	60	50	

(1 Fuß entspricht 30,48 cm)

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.
b) Ermitteln Sie die grafische Lösung.
c) Lösen Sie das Problem durch Schnitt der bindenden Nebenbedingungen.

Lineare Programmierung
Wichtige Begriffe

- Zulässige Lösung, zulässiger Lösungsraum
- Bindende Nebenbedingung
- Entscheidungsvariablen (Vektor x), Zielfunktionskoeffizienten (Vektor c), rechte Seiten (Vektor b), technologische Koeffizienten (Matrix A)
- LP in kanonischer Form, LP in Standardform
- Schlupfvariable, Überschussvariable
- Simplexmethode (Algorithmus zur Lösung eines LPs)
- Sensitivitätsanalyse (Postoptimalitätsanalyse)
  - Änderung der Zielfunktionskoeffizienten (reduzierte Kosten)
  - Änderung der rechten Seiten (duale Preise)
- 100%-Regeln für Zielfunktionskoeffizienten und rechte Seiten

Lineare Programmierung
Mathematische Form

Kanonische Form

$$\max \quad c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Standardform

$$\max \quad c^T x$$

$$\text{s.t.} \quad Ax + s = b, \quad x \geq 0$$

LP mit
n Entscheidungsvariablen
und
m Nebenbedingungen

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_m \end{pmatrix}$$

Lineare Programmierung
Computerlösung (MS Excel Solver)

Der berühmte australische Schihersteller *Onyx* erzeugt zwei unterschiedliche Kategorien von Schi, sportliche Race-Carver und familienfreundliche Allroundschi. Beide Kategorien werden ausschließlich aus den Ausgangsmaterialien Holz und Stahl hergestellt. Die Mengen der Rohstoffe in Kilo, die man für die Herstellung eines Paar Schi benötigt, sind in der Tabelle angegeben.

	Holz	Stahl
Race-Carver	3	4
Allroundschi	6	2

Pro Woche werden 120 Kilo Holz und 100 Kilo Stahl geliefert. Der Gewinn pro Paar für den Race-Carver beträgt € 11 und für den Allroundschi € 9.

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.
b) Ermitteln Sie den optimalen wöchentlichen Produktionsplan unter dem Gesichtspunkt der Gewinnmaximierung am Computer mit Hilfe von MS Excel Solver.
c) Interpretieren Sie die optimale Lösung (reduzierte Kosten, Schlupf-/Überschuss-variable, duale Preise, obere/untere Schranken für Zielfunktionskoeffizienten und rechte Seiten).

Lineare Programmierung
Interpretation der Ergebnisse

Objective Function Value: Zielfunktionswert

Value: Wert der Variablen in der optimalen Lösung

Reduced Costs: Zeigen an, um wie viel sich die Koeffizienten der Variablen in der Zielfunktion ändern müssten, damit die jeweilige zugehörige Variable an Bedeutung gewinnt und positiv wird (in die optimale Lösung kommt). Ist der Wert der Variablen bereits positiv, sind die Reduced Costs 0.

Slack: Bei ≤ NB. Gibt an, um wie viel in der jeweiligen Nebenbedingung der Begrenzungswert nicht erreicht wird (freie Kapazitäten).

Surplus: Bei ≥ NB. Gibt an, um wie viel die Untergrenze der jeweiligen Nebenbedingung überschritten wird (Überschuss).

Dual Prices: Geben an, um wie viel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn sich die rechte Seite (Beschränkung der Kapazität) einer Nebenbedingung um 1 erhöht. Wenn der Slack (Surplus) ≠ 0, dann ist der duale Preis 0.

Objective Coefficient Ranges: Geben an, in welchem Bereich sich die Koeffizienten der Zielfunktion bewegen dürfen, ohne dass sich die Werte der Variablen in der optimalen Lösung verändern.

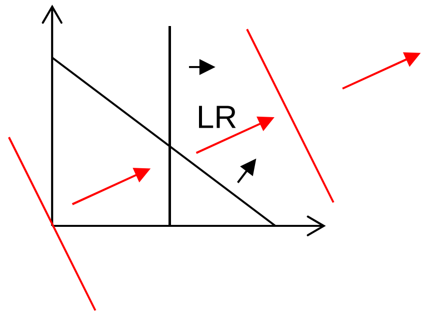
Right Hand Side Ranges: Solange die rechte Seite einer Nebenbedingung innerhalb der Right Hand Side Ranges bleibt, verändern sich die dualen Preise nicht.

Lineare Programmierung
Produktion von Sportgeräten

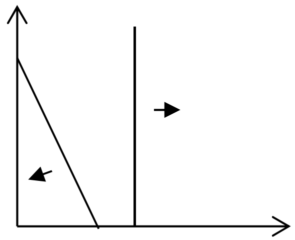
Die VerticalRiders GmbH erzeugt zwei Mountainbike-Typen in unterschiedlichen Qualitätsstufen. Beide Produkte durchlaufen zwei Fertigungsstufen. Zur Erzeugung eines Stücks von Produkt 1 werden in der Fertigungsstufe I 5 Minuten benötigt, in der Fertigungsstufe II kann die Qualität von Produkt 1 variiert werden. Je nachdem, ob ein Stück von Produkt 1 mit der höchsten, mittleren oder niedrigsten Qualität erzeugt wird, werden 5, 4 bzw. 3 Minuten in Fertigungsstufe II benötigt. Entsprechend der Qualität ist auch der erzielbare Preis für Produkt 1 verschieden: € 2300, € 1800 bzw. € 900. Für das Produkt 2 bestehen die Möglichkeiten einer Normalausführung (2 Minuten in Fertigungsstufe I, 3 Minuten in Fertigungsstufe II, Preis: € 400) und einer Luxusausführung (3 Minuten in Fertigungsstufe I, 4 Minuten in Fertigungsstufe II, Preis: € 600). Insgesamt sollen von Produkt 2 genau 1300 Stück und von Produkt 1 mindestens 800 Stück erzeugt werden. Die Kapazitäten der Anlagen in den Fertigungsstätten I und II betragen 7000 Minuten bzw. 8200 Minuten. Gehen Sie davon aus, dass alle gefertigten Stück abgesetzt werden können. Erstellen Sie ein lineares Programm, um die aus den Absätzen erzielbaren Einnahmen zu maximieren.

Lineare Programmierung
Sonderfälle

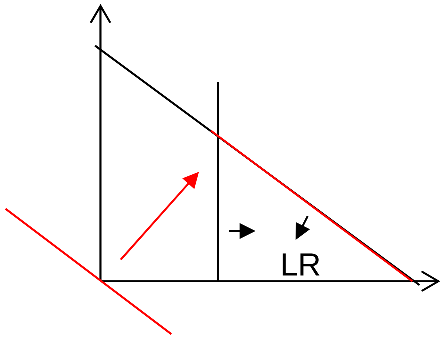
- Unbeschränkte Lösung



- Keine Lösung



- Mehrdeutige Lösung



Transportproblem
Problemformulierung

- Grafische Darstellung als Netzplan
- i Produktionsstätten erzeugen jeweils s_i Stück
- j Kunden fragen jeweils d_j Stück nach
- Spezifische Transportkosten c_{ij} von Produktionsstätte i zum Kunden j
- Problemstellung: Wie viele Stück x_{ij} sollen jeweils von Produktionsstätte i zum Kunden j transportiert werden um die Nachfrage möglichst kostengünstig zu befriedigen?
- Transportproblem in allgemeiner Form als LP

Transportproblem Sportartikelhändler

Ein Sportartikelhändler besitzt 3 Fabriken (A,B,C) und 4 Verkaufsgeschäfte (R,S,T,U). Die Fabriksproduktion und der Transport der Güter von den Fabriken zu den Geschäften soll nun so eingeteilt werden, dass die Gesamtkosten minimal sind.

Fabrik	Kosten/Einheit	Erzeugungskapazität/Monat
A	10	75
B	11	32
C	12	67

Transportkosten von	nach	R	S	T	U
A		0	1	1	2
B		1	2	3	1
C		4	3	3	6
benötigte Güter		65	24	16	15

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.

b) Stellen Sie das zugehörige Transporttableau auf und ermitteln Sie eine Startlösung mit der Methode der geringsten Kosten.

Transportproblem
Allgemeine Form als LP

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \text{für alle } i, j$$

Transportproblem
Lösung mittels Transporttableau

- Die Anbieter repräsentieren die Zeilen, die Nachfrager die Spalten des Tableaus
- In den Randfeldern das Angebot der Produktionsstätten bzw. die Nachfrage der einzelnen Kunden eintragen
- Überprüfe, ob Summe Angebot = Summe Nachfrage; ansonsten künstlichen Anbieter od. Nachfrager (eine Dummy-Variable) mit Kosten von Null ergänzen
- Zugehörige Kosten in die jeweiligen Felder des Tableaus eintragen
- Ermittlung einer Startlösung mit der Methode der geringsten Kosten
- Ermittlung der optimalen Lösung am Computer
- MODI-Verfahren zur Überprüfung, ob Lösung optimal ist
- Stepping-Stone-Methode zur Verbesserung einer zulässigen Lösung

Transportproblem Variationen

	Lösung mit LP	**Lösung mit Transporttableau**
- Angebot ≠ Nachfrage	a) Angebotsüberschuss -> nichts tun b) Nachfrageüberschuss -> künstlichen Anbieter einführen	Künstlichen Anbieter oder Kunden einführen mit Kosten von Null
- Maximierungsaufgabe	Keine Änderung (außer max)	Keine Änderung (außer Lösung)
- Unmögliche Routen	Entsprechende Variable streichen	Sehr großen Kostenwert eintragen

Zuordnungsproblem
Problemformulierung

- Grafische Darstellung als Netzplan
- Jeder Schiedsrichter i soll einem Match j zugeordnet werden (gleich viele Schiedsrichter und Matches!)
- Spezifische Kosten (z.B. Anreise) der Zuordnung c_{ij} von Schiedsrichter i zu Match j
- Problemstellung: Welcher Schiedsrichter soll welchem Match zugeordnet werden um die Gesamtkosten der Zuordnung zu minimieren?
- Zuordnungsproblem in allgemeiner Form als LP
- Lösung mit der Ungarischen Methode

Zuordnungsproblem Schiedsrichter

Vier Schiedsrichter sollen auf je ein Match zugeteilt werden. Die Anreisekosten variieren von 0 bis 9 Geldeinheiten. Welcher Schiedsrichter soll welches Match pfeifen, um die zugehörigen Kosten zu minimieren? Wie hoch sind diese Kosten?

	M1	M2	M3	M4
SR 1	9	4	2	4
SR 2	7	5	0	3
SR 3	6	4	5	7
SR 4	9	6	5	7

a) Formulieren Sie das Problem als lineares Programm.
b) Lösen Sie das Problem mit der Ungarischen Methode.

Zuordnungsproblem
Allgemeine Form als LP

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{für alle } i, j$$

Zuordnungsproblem
Ungarische Methode

1) Zielfunktionskoeffizienten in Matrixform anschreiben
2) Spaltenreduktion – kleinsten Wert in jeder Spalte abziehen
3) Zeilenreduktion – kleinsten Wert in jeder Zeile abziehen
4) Versuch, alle Nullen in der Matrix mit möglichst wenigen senkrechten oder waagrechten Strichen zu streichen
   - ist die Anzahl der Striche gleich der Anzahl der Zeilen/Spalten → 6)
   - ist die Anzahl der Striche kleiner als die Anzahl der Zeilen/Spalten → 5)
5) Weitere Matrixreduktion
   - Von nicht durchgestrichenen Elementen das kleinste nicht durchgestrichene Element abziehen
   - Einmal durchgestrichene Elemente unverändert lassen
   - Bei doppelt durchgestrichenen Elementen das kleinste nicht durchgestrichene Element addieren → 4)
6) Eindeutige Nullen in der Matrix bestimmen (nur eine Null pro Zeile oder Spalte)
   Zuordnung vornehmen und entsprechende Zeile und Spalte streichen
   Nächste eindeutige Null bestimmen und Zuordnung vornehmen, usw.
7) Optimalen Zielfunktionswert bestimmen

Zuordnungsproblem
Variationen

- Angebot ≠ Nachfrage
- Maximierungsaufgabe
- Unmögliche Zuordnungen
- Mehrfache Zuordnungen

Ungarische Methode: zu Beginn jeden Wert vom größten Wert in der Matrix abziehen (Opportunitätskosten)

Nur bei LP möglich

Ganzzahlige Programmierung
Formen

- Rein ganzzahlige Probleme
- Gemischt ganzzahlige Probleme
- Binäre Probleme

Binäre Programmierung
Arten von Nebenbedingungen

- **Multiple-Choice and Mutually Exclusive Constraints**
  - Multiple-Choice: $A + B + C = 1$
  - Mutually Exclusive: $A + B + C \leq 1$

- ***k* out of *n* Alternatives Constraint**
  - $A + B + C + D + E = 2$
  - $A + B + C + D + E \leq 2$

- **Conditional and Corequisite Constraints**
  - Conditional: $A \leq B$
  - Corequisite: $A = B$

Binäre Programmierung
Schilehrer

Die Schischule *Pacific Skiing* im bekannten australischen Schiort Perisher Blue will in der Wintersaison Juli/August 2002 fünf Schilehrer anstellen. Auf das Jobangebot im Internet melden sich zwei österreichische (Peter und Stefanie), ein deutscher (Detlef) und vier amerikanische Schilehrer (Mike, Jason, Kevin und Patricia). Von der Ausbildung her sind Peter, Patricia und der Deutsche Schilehrer-Anwärter (niedrigstes Niveau), der Rest sind staatlich geprüfte Schilehrer (höchstes Niveau). Staatlich geprüfte Schilehrer kosten die Schischule AUD (Australische Dollar) 7000 für die zwei Monate, Anwärter kosten für dieselbe Zeit AUD 4000. Die Schischule will ihre Lohnkosten minimieren, wobei jedoch bestimmte Nebenbedingungen erfüllt sein müssen:

1) Um das Niveau zu halten, will der Schischulleiter mindestens drei staatlich geprüfte Schilehrer aufnehmen.
2) Auf keinen Fall sollen drei (von ihrer Herkunft und Muttersprache her) deutschsprachige Schilehrer angestellt werden.
3) Der Schischulleiter möchte mindestens eine Schilehrerin aufnehmen.
4) Das Verhältnis Österreicher zu Amerikaner soll in dieser Schischule höchstens 1:2 betragen.
5) Wenn der Deutsche angestellt wird, muss auch zumindest einer der beiden Österreicher aufgenommen werden.

Erstellen Sie das zugehörige binäre lineare Programm mit dem Ziel, die Lohnkosten für die Schischule zu minimieren.

Aufgabe 1
Beispiel

- Erstellen Sie ein Beispiel im Sportmanagement-Kontext zu einem der behandelten Modelle ((binäre) lineare Programmierung, Transport- oder Zuordnungsproblem, Prognose) und lösen Sie es mit Hilfe von MS Excel.

- Abgabe: Wann immer Sie wollen per Email an reinhard.grohs@uni-seeburg.at als Word-, Excel- oder pdf-Datei (Angabe, Aufstellen des linearen Programms bzw. des Modells, Ergebnisse).

- Die abgegebenen Beispiele werden als Übungsbeispiele allen LV-Teilnehmern zur Verfügung gestellt und eines der Übungsbeispiele ist auch ein Bestandteil der Klausur.

Aufgabe 2
Fallstudie

- Lösen Sie die MLB Scheduling Fallstudie. Seien Sie vorbereitet, Ihre Lösung am zweiten Tag der Präsenz zu präsentieren (20% der Gesamtnote).

- Tipp: Erstellen Sie zuerst die Zuordnungsmatrix, die sich unter Berücksichtigung aller Restriktionen ergibt. Lösen Sie diese dann mit Hilfe der Ungarischen Methode und stellen Sie das resultierende lineare Programm auf und lösen dieses mit Hilfe des MS Excel Solvers.

- Wenn Sie Schwierigkeiten haben, verwenden Sie die Musterlösung auf der Lernplattform als Anhaltspunkt.