Diskrete Modellierung

Sie dürfen einen Matrizenrechner als Hilfsmittel verwenden. (z. B. https://matrixcalc.org/de)

Aufgabe 10.1. *Irreduzibilität und Aperiodizität* (16 + 12 = 28 Punkte)

a) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4. Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), welche der Graphen i) irreduzibel, ii) aperiodisch sind, und welche nicht.

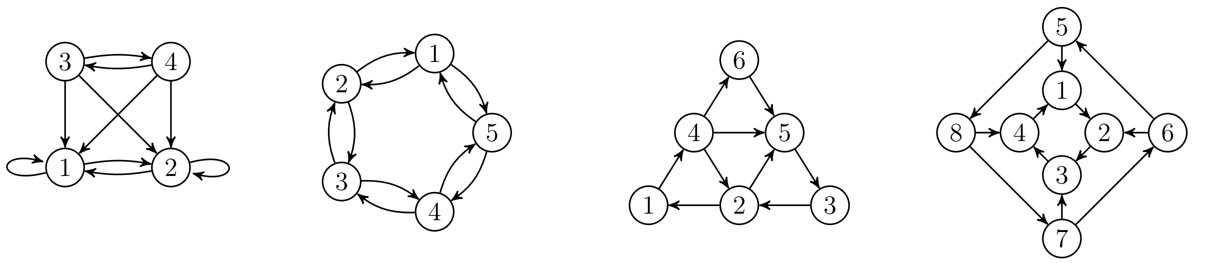


Abbildung 1: von links nach rechts: G_1, G_2, G_3 und G_4

Hinweis: Sie dürfen die Aussage aus Aufgabe 6.19 im Skript verwenden: Wenn ein irreduzibler Graph einen Zustand mit Periode 1 hat, dann ist er aperiodisch.

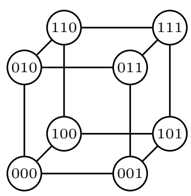
b) Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ beliebig. Wir betrachten Irrfahrten auf ungerichteten Graphen mit der Knotenmenge $V := \{0,1\}^d$, wobei in jedem Zug jeweils alle Nachbarn mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt werden.

Zur Erinnerung: Für alle Knoten $i, j \in V$ bezeichnet $\mathrm{H}(i,j)$ den Hammingabstand zwischen i und j, d. h. die Anzahl der Bits, in denen sich i und j unterscheiden.

i) Der Graph $W = (V, E_1)$ hat die Kantenmenge $E_1 := \big\{\{i,j\} : i,j \in V,\ \mathrm{H}(i,j) = 1\big\}$.
(W ist der d-dimensionale Würfel.)

ii) Der Graph $W^2 = (V, E_2)$ hat die Kantenmenge $E_2 := \big\{\{i,j\} : i,j \in V,\ 1 \leq \mathrm{H}(i,j) \leq 2\big\}$.
(Somit gilt $\{i,j\} \in E_2$ genau dann, wenn i und j in W durch einen einfachen Weg der Länge 1 oder 2 verbunden sind.)

Entscheiden Sie für die so beschriebenen Markov-Ketten, ob sie irreduzibel und ob sie aperiodisch ist.



Beispiel: $W = (V, E_1)$ für $d = 3$

Bitte wenden!

Aufgabe 10.2. *Deutsche Post* (7 + 7 + 6 + 4 + (3+4+3) = 34 Punkte)

Die Deutsche Post unterhält eine Filiale mit drei Mitarbeitern. Jeder Mitarbeiter kann einen Kunden betreuen (dann ist er *beschäftigt*) oder gerade nichts zu tun haben (dann ist er *frei*). Betrachten Sie die beiden folgenden Prozesse:

(N) **Das Eintreffen neuer Kunden:** In jedem Schritt treffen mit Wahrscheinlichkeit $1/20$ drei neue Kunden, mit Wahrscheinlichkeit $3/20$ zwei neue Kunden, mit Wahrscheinlichkeit $9/20$ ein neuer Kunde und mit Wahrscheinlichkeit $7/20$ gar kein neuer Kunde ein.
Die Neuankömmlinge werden an die freien Mitarbeiter verteilt, die anschließend beschäftigt sind. Bereits vorhandene Kunden bleiben weiterhin. Stehen nicht genügend freie Mitarbeiter für alle neuen Kunden zur Verfügung, so verlassen die überzähligen, nicht bedienten Kunden die Filiale wieder und gehen heim.

(A) **Die Kundenabfertigung:** In jedem Schritt fertigt jeder beschäftigte Mitarbeiter unabhängig von den anderen Mitarbeitern seinen Kunden mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ab und ist anschließend frei. Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ bleibt ein betreuter Kunde und sein Mitarbeiter ist weiterhin beschäftigt. Freie Mitarbeiter sind natürlich weiterhin frei.

Wir wollen das Geschehen mit Markov-Ketten modellieren, dazu verwenden wir die Zustände $0, 1, 2, 3$, wobei Zustand i bedeute, dass sich genau i Kunden in der Filiale aufhalten, also genau i Mitarbeiter beschäftigt sind.

a) Modellieren Sie den Prozess (N) des Eintreffens neuer Kunden. Nehmen Sie hierfür an, dass keine Kunden abgefertigt werden. Stellen Sie dazu die Übergangsmatrix N auf und geben Sie den dazugehörigen Graphen G_N an.

b) Modellieren Sie den Prozess (A) der Kundenabfertigung. Nehmen Sie hierfür an, dass keine neuen Kunden eintreffen. Stellen Sie dazu die Übergangsmatrix A auf und geben Sie den dazugehörigen Graphen G_A an.

c) Betrachten Sie nun die Markov-Ketten, in denen die beiden Prozesse (A) und (N) abwechselnd ausgeführt werden: Auf jeden Schritt der Kundenabfertigung (A) folgt das Eintreffen neuer Kunden (N) und umgekehrt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen

$$P := A \cdot N \text{ und } Q := N \cdot A.$$

Was drückt die zu P gehörige Markov-Kette (G_P, P) aus? Was drückt die zu Q gehörige Markov-Kette (G_Q, Q) aus?

d) Berechnen Sie für (G_P, P) und (G_Q, Q) jeweils (näherungsweise) eine stationäre Verteilung, z. B. mithilfe eines Matrizenrechners.

e) Beantworten Sie folgende Fragen mithilfe der vorherigen Teilaufgabe.

- Wie viele Mitarbeiter sind im Durchschnitt beschäftigt (am Ende von Prozess (N))?
- Wie viele Kunden gehen durchschnittlich während des Prozesses (N) heim, weil kein freier Mitarbeiter zur Verfügung steht? (D. h. wie viele Kunden gehen „verloren"?)

  Hinweis: Berechnen Sie zunächst, wie viele Kunden jeweils verloren gehen, wenn die Kette im Zustand i ist.
- Würden Sie empfehlen, einen weiteren Mitarbeiter einzustellen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3. *Maximierung mit Markov-Ketten* ((7+7) + 18 + 6 = 38 Punkte)

Der *Metropolis-Algorithmus* ist ein Verfahren zur Lösung schwieriger Maximierungsprobleme. Beispielsweise muss beim MAX-KNF-Problem für eine gegebene KNF φ mit n Variablen eine Belegung $x^* \in \{0,1\}^n$ gefunden werden, die möglichst viele Klauseln von φ erfüllt. Der *Lösungsgraph* für φ ist der d-dimensionale Würfel W_d, wobei jedem Knoten $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ die Anzahl $f(x)$ der von x erfüllten Klauseln in φ zugeordnet wird. Um ein globales Maximum von f zu finden, führen wir eine Irrfahrt auf dem Lösungsgraphen durch. Um dabei nicht in einem lokalen Maximum steckenzubleiben, darf der Irrfahrer in einem Schritt nicht nur Nachbarknoten mit höherem Funktionswert besuchen („Uphill-Bewegung"), sondern auch gelegentlich zu einer schlechteren Lösung wechseln („Downhill-Bewegung").

In dieser Aufgabe betrachten wir sehr einfache Lösungsgraphen $G := (V, E)$ mit der Knotenmenge $V := \{1, \ldots, n\}$ und der Kantenmenge $\big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n{-}1, n\}\big\}$, wobei jedem Knoten $i \in V$ ein Funktionswert $f(i) \in \mathbb{N}$, die sogenannte *Höhe* von i, zugeordnet ist. Zwischen je zwei benachbarten Knoten $i, i+1 \in V$ beträgt der Höhenunterschied genau 1 oder –1, d. h. $|f(i) - f(i+1)| = 1$. Von Zustand i aus wird ein Nachbarzustand $j \in \{i{-}1, i{+}1\}$ mit Wahrscheinlichkeit u (*uphill*) besucht, falls $f(j) > f(i)$; und mit Wahrscheinlichkeit d (*downhill*) besucht, falls $f(j) < f(i)$. Dabei gilt $0 < d \leq u \leq \frac{1}{2}$, d. h. der Irrfahrer bevorzugt Uphill-Bewegungen. Mit der restlichen Wahrscheinlichkeit verbleibt der Irrfahrer in Zustand i. Formal gilt für die Einträge der Übergangsmatrix P:

$$\text{Für } i \in \{2, \ldots, n{-}1\} \text{ gilt } P_{i,j} = \begin{cases} u & \text{falls } j \in \{i{-}1, i{+}1\} \text{ und } f(j) > f(i), \\ d & \text{falls } j \in \{i{-}1, i{+}1\} \text{ und } f(j) < f(i), \\ 1 - P_{i,i-1} - P_{i,i+1} & \text{falls } j = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Zustände 1 und n gelten entsprechende Übergangswahrscheinlichkeiten, wobei hier jeweils nur ein Nachbarzustand existiert.

a) Sei $n = 7$ und seien die Höhen $f(1) = f(5) = f(7) = 0$, $f(2) = f(4) = f(6) = 1$ und $f(3) = 2$ durch Abbildung 2 gegeben:

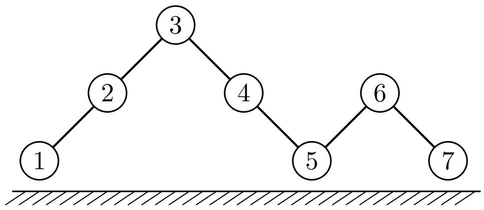


Abbildung 2: Darstellung des Lösungsgraphen G

Geben Sie für die folgende Parameterwahl von u und d jeweils den Graphen der Markov-Kette an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. Berechnen Sie anschließend die Grenzverteilung näherungsweise, z. B. mithilfe eines Matrizenrechners.

i) $d = \frac{1}{4}$, $u = \frac{1}{2}$ ii) $d = \frac{1}{40}$, $u = \frac{1}{2}$

Der Irrfahrer starte in Knoten 7, d. h. die Startverteilung sei $\pi^{(0)} = (0,0,0,0,0,0,1)$. Nach wie vielen Schritten befindet sich der Irrfahrer jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1/4$ im globalen Maximum von f, d. h. bestimmen Sie für beide Ketten ein kleinstmögliches t mit $\pi_3^{(t)} \geq 1/4$. In welcher der beiden Ketten ist die relative Häufigkeit von 3 größer?

Bitte wenden!

b) Zeigen Sie, dass für jede Wahl von n, f, u und d die Verteilung $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$\text{mit } \mu_i := \frac{1}{\mathcal{C}} \cdot \left(\frac{u}{d}\right)^{f(i)} \quad \text{f.a. } i \in V$$

stationär ist, wobei $\mathcal{C} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u}{d}\right)^{f(i)} > 0$ eine Konstante[1] ist.

Hinweis: Unterscheiden Sie für die mittleren Zustände $2, \dots, n-1$ die drei Fälle

- i ist ein „Gipfel", d. h. $f(i-1) < f(i)$ und $f(i) > f(i+1)$.
- i ist ein „Tal", d. h. $f(i-1) > f(i)$ und $f(i) < f(i+1)$.
- i ist ein „Hang", d. h. $f(i-1) < f(i) < f(i+1)$ oder $f(i-1) > f(i) > f(i+1)$.

Um zu zeigen, dass μ stationär ist, zeigen Sie $\mu_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot P_{ji}$ für alle $i \in V$.

c) Was passiert, wenn d sehr viel kleiner als u ist? Was passiert, wenn d und u etwa gleichgroß sind?

Weihnachtsaufgabe 10.4. *Existenz stationärer Verteilungen* (15 + 10 = 25 Extrapunkte)

a) Jede *nicht*-aperiodische Markov-Kette lässt sich durch Hinzufügen von Eigenschleifen in eine aperiodische Kette überführen, welche dieselben stationären Verteilungen besitzt.

Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine beliebige Markov-Kette mit Graphen $G = (V, E)$, sei I die Einheitsmatrix und $0 < \varepsilon < 1$. Betrachte die Markov-Kette $\mathcal{M}' = (G', P')$ mit dem Graphen $G' = (V, E')$ wobei $E' = E \cup \{(i,i) : i \in V\}$, und der Übergangsmatrix $P' = (1-\varepsilon) \cdot P + \varepsilon \cdot I$.

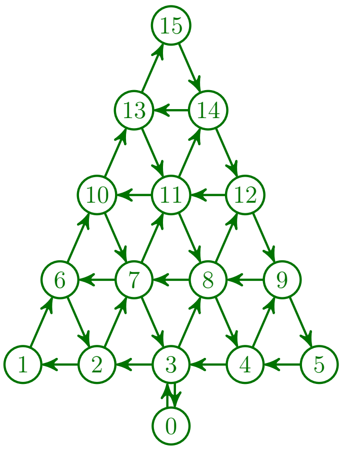
Zeigen Sie:

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ besitzen dieselben stationären Verteilungen, d. h. für jede Verteilung σ gilt:

$$\sigma \text{ ist eine stationäre Verteilung für } \mathcal{M} \iff \sigma \text{ ist eine stationäre Verteilung für } \mathcal{M}'$$

b) Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine Markov-Kette und G irreduzibel.

Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ besitzt genau eine stationäre Verteilung.



Eine besinnliche Denkaufgabe zum Jahresende:

Ist der Weihnachtsbaum[a] aperiodisch?
Ist der Weihnachtsbaum irreduzibel?
Ist der Weihnachtsbaum ergodisch?

[a] Obgleich der Weihnachtsbaum graphentheoretisch betrachtet *kein* Baum sondern ein gerichteter Graph ist, verwenden wir hier die Bezeichnung Weihnachts*baum*.

Frohe Feiertage und einen tollen Start in $2^2 \cdot 5 \cdot 101$*!*

[1] Die Konstante dient lediglich dazu, die Wahrscheinlichkeiten auf 1 zu normieren, spielt aber für die Modellierung hier keine Rolle.